

物理质团法关于可压流计算的程序验证

马智博¹, 石磊², 于明¹, 郑欢¹
(1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094;
2. 浙江陆特能源科技股份有限公司, 杭州 310052)

摘 要: 为了评估无网格物理质团法(PECM)对可压流计算的可信性,结合物理认识对该方法的设计思想和数值格式进行了先验分析,基于 9 个一维模型数值解与参照解的对比信息,通过后验分析方法对 PECM 进行了程序验证,参照解包括无网格再生核粒子法(RKPM)的数值解以及精确解。验证结果表明:各种物理参数以及状态方程的强烈间断会导致 RKPM 严重的失稳或失真,而 PECM 在包括极大密度比在内的各种间断条件下仍保持稳定和收敛并具有较高的准确度。
关 键 词: 无网格方法; 物理质团法; 光滑粒子法; 再生核粒子法; 程序验证
中图分类号: V23; O242.1 **文献标志码:** A

Code verification of physics evoked cloud method for compressible fluid dynamics

MA Zhibo¹, SHI Lei², YU Ming¹, ZHENG Huan¹

(1. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China;
2. Zhejiang Loopmaster Energy Technology Corporation Limited, Hangzhou 310052, China)

Abstract: In order to assess the credibility of the mesh free physics evoked cloud method (PECM) applied in simulation of compressible flows, the ideas and schemes of this method were analyzed a priori by combining the cognitions of physical laws, and based on the information of comparisons between numerical and referential solutions about nine one-dimensional models, code verification of PECM was implemented through a posteriori assessments, in which the referential solutions include numerical solutions of mesh free reproducing kernel particle method (RKPM) and exact solutions. The results of code verification indicate that strong discontinuities in various physical parameters or equations of state can lead to serious instabilities or infidelities of RKPM, whereas PECM still works robustly with excellent properties of accuracy and convergence even if very large density ratio exists.

Key words: mesh free method; physics evoked cloud method;
smoothed particle hydrodynamics;
reproducing kernel particle method; code verification

建模与模拟(modeling & simulation, M&S) 用^[1-4]。模拟环节中的数值计算有欧拉(Eulerian)和拉格朗日(Lagrangian)两个基本的方法体
对工程系统的设计与可靠性认证起着重要支撑作

收稿日期:2018-12-17
基金项目:中国工程物理研究院创新发展基金(CX2019026)
作者简介:马智博(1963—),男,研究员,博士,主要从事计算物理、可靠性理论与工程研究。
引用格式:马智博,石磊,于明,等.物理质团法关于可压流计算的程序验证[J].航空动力学报,2019,34(6):1253-1272. MA Zhibo, SHI Lei, YU Ming, et al. Code verification of physics evoked cloud method for compressible fluid dynamics[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(6): 1253-1272.

系,它们分别将物理量定义在空间和物质上。欧氏方法适合大变形计算,但难以有效描述物质的历史信息 and 物质界面的时空演化;拉氏方法虽然能弥补欧氏方法的缺点,但如果数值格式基于网格,则不适应大变形计算。由于两者在实施中存在互斥性,基于网格的 coupled Eulerian-Lagrangian (CEL)、arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) 和 unified coordinate system(UCS)等混合型方法也并不能完全吸纳和规避两者的优点与缺点,对需要记录物质历史的大变形运动仍难适应^[5-8]。实践表明,依赖网格的方法适应性不足且不利于软件发展,但工程问题的多样性和复杂性以及模拟软件的运营与维护很需要普适性强的算法。

强普适性算法需要满足各种典型物质运动形态对数值模拟的要求。在航空、水利、交通、气象、地矿等工程领域会遇到一般流体的大变形运动;在金属冷轧成型、桥梁破坏坍塌、地壳板块运动、示踪核素血流成像、核爆烟云辐射杀伤、地下岩体多孔渗流等应用领域会遇到包含寿命型物质(寿命特性分别来自固体的塑性应变、放射性核素的衰变、岩体孔隙的杂质沉积等)的大变形运动,需要记录微元体物质的历史信息;在飞行器动态毁伤、弹头高速撞靶、惯性约束核聚变(ICF)、Z 箍缩(Z-pinch)以及核爆炸等涉及爆轰冲击的应用领域,数值方法不仅需要适应大变形和历史记忆,还要能够精确预测各种间断对动力学演化造成的影响,这些间断包括介质物理属性及其密度、速度、应力、内能等物理参数在计算域中存在的突变,间断面两边的密度比可达 5 个量级或更高^[9-13]。在算法设计中,无黏流体的应力和应变具有最简单的表达形式,所对应的算法是建立黏流和固体等其他材料数值模拟方法的技术基础。

文献[14-16]根据多门类应用需求对计算软件的发展要求,提出了具有广泛普适性的物理质团法(physics evoked cloud method,PECM)。基于该方法发展的数值模拟软件 HAUC(how are universes cuddling?)包含直角坐标、柱坐标和球坐标下一维至三维模型的数值模拟以及模拟结果的不确定度量化等功能。PECM 首先根据物理属性对不同物质进行类别划分并建立物质类型之间的继承和派生关系,借助物理认知对每个类型构造专属的拉氏无网格算法,对不同物质之间的相互作用建立不依赖界面描述的信息耦合算法,这使得该方法能够很好地适应各类复杂的物质运动。比如对航空发动机,从转子叶片到定子叶片的流场

对应完全相同的算法,不需要坐标转换,并可实时地表现叶片受燃气冲刷导致的变形、破坏和烧蚀等流固耦合过程而勿须用户在计算模型中设置复杂的交界面信息。PECM 有 6 项设计原则,但对计算格式并无具体限制,目前的算法借鉴光滑粒子法(smoothed particle hydrodynamics,SPH)中的核近似思想^[17]。

无网格方法有很多种,其中 SPH 的核近似方案有计算量小和普适性强的优点。Reproducing kernel particle method(RKPM)、corrective smoothed particle method(CSPM)和 modified smoothed particle hydrodynamics(MSPH)通过修正 SPH 核函数以改善核估计精度,weakly compressible SPH(WCSPH)、incompressible SPH(ISPH)、 δ -SPH 通过人为弱可压状态方程、压强泊松方程、添加抑波因子等技术手段拓展了 SPH 对不可压流的适应能力^[18-23]。

拉氏无网格方法对需要记忆历史信息的大变形问题具有天然的适应性,而能否对其中的间断问题实现很好的模拟才是检验该类方法能否满足应用需求的关键,也是本文的关注点,因为无网格方法对连续问题的模拟容易达到应用需求。作者认为间断处物理量的导数出现奇异,应当结合物理认识建立无网格方法的数学表达式。对间断问题的数值模拟,一般按照 Von Neumann 等^[24]或 Godunov^[25]提出的思想构造数值方法。前者借助添加人为黏性项,通过宏观时空离散单元所对应的物理量来表现发生在微观时空下的现象,这类作法可被理解为模拟环节中的模化(modularizing)。本文基于 Von Neumann 思想开展算法研究,并将对应的添加项称为模化因子(modularizing factor)。

间断的产生主要源自不同物质的接触以及非线性问题引起的冲击波等物理机制。不同类型的间断面也有可能交汇,其中伴随大密度比的强间断问题对无网格和有网格方法均构成极大挑战。工程应用需要计算方法能够成功完成全过程模拟,并准确预测物质界面的离合以及间断面两边的参数分布。间断面两边不同物理参数的真解有可能是连续的,也有可能是间断的,数值结果应该忠实反映这些客观存在的连续性或间断性。

理论与实践表明,RKPM、CSPM 和 MSPH 仅基于近邻粒子的空间信息校正 SPH 核函数,这对孤立、静止的空间函数及其导数是有效的,但对描述时空演化规律并包含各种间断的流体动力学方程组并无明显效果,这些核估计类无网格方法

对可压流计算的稳定性和准确性尚不能满足爆轰冲击系统精量化设计的技术要求。RKPM 用比较简单的方法对核函数进行校正,提高了离散条件下内点和边界点的估计精度,其他环节与 SPH 完全一致,因此本文在可信度分析中以 RKPM 来代表 SPH 或与之相近的核估计类无网格方法。

本文在文献[14-15]的基础上,结合核估计、模化因子和离散方程等主要技术环节对 PECM 的无黏流计算格式作进一步论述,并结合物理认识对 RKPM 和 PECM 关于可压流算法的设计思想和数值格式进行先验分析,然后通过 9 个包含不同强间断类型的一维模型及其对应的数值解和精确解,基于结果对比等后验分析方法实现 PECM 对可压流计算的程序验证^[26]。本文所有模型对应的 RKPM 数值解、PECM 数值解、精确解以及收敛精度等级的量化评估结果均由 HAUC 软件产生。

1 流体力学控制方程

对不考虑外力、热源和物理黏性的流体,拉格朗日形式的流体力学控制方程为

质量方程

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \tag{1}$$

动量方程

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \tag{2}$$

能量方程

$$\frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} \tag{3}$$

其中 p 、 ρ 、 e 、 $\mathbf{v}$ 、 t 分别为压强、密度、内能、速度和时间。

2 时间推进格式

从 n 时刻到 $n+1$ 时刻的时间推进求解,本文采用预估、校正格式,分别对应式(4)~式(9)和式(10)~式(15),其中右上标代表变量对应的时间步, h 为核估计的光滑长度, $\mathbf{r}$ 为微元体位置坐标, 时间步长 $\Delta t = \tau h / (c + |\mathbf{v}|)$, c 为声速, τ 为时间步长因子。

$$\rho^{n+1/2} = \rho^n + 0.5 \Delta t (d\rho/dt)^n \tag{4}$$

$$e^{n+1/2} = e^n + 0.5 \Delta t (de/dt)^n \tag{5}$$

$$h^{n+1/2} = h^n + 0.5 \Delta t (dh/dt)^n \tag{6}$$

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^n + 0.5 \Delta t (d\mathbf{v}/dt)^n \tag{7}$$

$$\mathbf{r}^{n+1/2} = \mathbf{r}^n + 0.5 \Delta t \mathbf{v}^n \tag{8}$$

$$p^{n+1/2} = p(\rho^{n+1/2}, e^{n+1/2}) \tag{9}$$

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \Delta t (d\rho/dt)^{n+1/2} \tag{10}$$

$$e^{n+1} = e^n + \Delta t (de/dt)^{n+1/2} \tag{11}$$

$$h^{n+1} = h^n + \Delta t (dh/dt)^{n+1/2} \tag{12}$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t (d\mathbf{v}/dt)^{n+1/2} \tag{13}$$

$$\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + \Delta t \mathbf{v}^{n+1/2} \tag{14}$$

$$p^{n+1} = p(\rho^{n+1}, e^{n+1}) \tag{15}$$

3 RKPM 计算格式

3.1 核函数

本文取式(16)所示的 SPH 核函数,其中 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 分别为核函数中心及近邻点的位置坐标, $q = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/h$ 。对空间维数 N_{sd} 分别等于 1、2、3 的一维至三维问题,归一化常数 σ 分别等于 2/3、10/(7 π)、1/ π 。式(17)为基于式(16)和校正函数组成的 RKPM 核函数。

$$W^{(sph)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = \begin{cases} \frac{\sigma}{h^{N_{sd}}} \left(1 - \frac{3}{2} q^2 + \frac{3}{4} q^3 \right) & 0 \leq q < 1 \\ \frac{\sigma}{h^{N_{sd}}} \left[\frac{1}{4} (2 - q)^3 \right] & 1 \leq q < 2 \\ 0 & 2 \leq q < \infty \end{cases} \tag{16}$$

$$W^{(rkpm)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = C^{(rkpm)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) W^{(sph)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \tag{17}$$

n_c 阶校正函数 $C^{(rkpm)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ 的求解基于相容性条件(式(18)~式(19))及其离散形式(式(20)~式(21))。其中 j 为 i 粒子支撑域 Ω_i 内近邻粒子的序号, m_j 、 ρ_j 、 $b_j = m_j/\rho_j$ 分别为 j 粒子的质量、密度、体积, N 为 Ω_i 内的粒子个数,并简记 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $C_{ij}^{(rkpm)} = C^{(rkpm)}(\mathbf{r}_{ij}, h_i)$, $W_{ij}^{(sph)} = W_{ij}^{(sph)}(\mathbf{r}_{ij}, h_{ij})$ 。

$$\int_{\Omega} W^{(rkpm)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' = 1 \tag{18}$$

$$\int_{\Omega} W^{(rkpm)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^k d\mathbf{r}' = 0, \tag{19}$$

$k = 1, 2, \dots, n_c$

$$\sum_{j=1}^N b_j C_{ij}^{(rkpm)} W_{ij}^{(sph)} = 1 \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^N b_j C_{ij}^{(rkpm)} W_{ij}^{(sph)} \mathbf{r}_{ij}^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n_c \tag{21}$$

3.2 模化因子

RKPM 采用与 SPH 相同的模化因子,其压强模化因子 $\Pi_{ij}^{(sph)}$ 和热流模化因子 $\mathbf{H}_{ij}^{(sph)}$ 分别为

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{(\text{sph})} = & \begin{cases} (-\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2) / \rho_{ij} & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) < 0 \\ 0 & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \geq 0 \end{cases} \\ & (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij}^{(\text{sph})} = & \begin{cases} \frac{2 \zeta_{ij} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{\rho_{ij} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 + \eta h_{ij}^2]} & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) < 0 \\ \mathbf{0} & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \geq 0 \end{cases} \\ & (23) \end{aligned}$$

其中 $c_{ij} = (c_i + c_j) / 2$; $\rho_{ij} = (\rho_i + \rho_j) / 2$; $h_{ij} = (h_i + h_j) / 2$; $\mu_{ij} = h_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) / [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 + \epsilon h_{ij}^2]$; $\zeta_{ij} = (\zeta_i + \zeta_j) / 2$, $\zeta = g_1 h c + g_2 h^2 \cdot (|\nabla \cdot \mathbf{v}| - \nabla \cdot \mathbf{v})$ 。 $\alpha, \beta, \epsilon, \eta, g_1, g_2$ 为常数。如用 h_i 代替 h_{ij} , 则支撑域的尺度在求和运算中不随 j 而变化。

3.3 离散方程

离散方程来自对微分方程右端施用核估计算符并添加模化因子, 本文选用如下形式的 RKPM 离散方程。

质量方程

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{rkpm})} \quad (24)$$

动量方程

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\mathbf{p}_i}{\rho_i^2} + \frac{\mathbf{p}_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij}^{(\text{sph})} \right) \nabla_i W_{ij}^{(\text{rkpm})} \quad (25)$$

能量方程

$$\begin{aligned} \frac{de_i}{dt} = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left[\left(\frac{\mathbf{p}_i}{\rho_i^2} + \frac{\mathbf{p}_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij}^{(\text{sph})} \right) \right. \\ & \left. (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) + \mathbf{H}_{ij}^{(\text{sph})} \right] \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{rkpm})} \end{aligned} \quad (26)$$

光滑长度演化方程

$$\frac{dh_i}{dt} = - \left(\frac{h_i}{N_{\text{sd}} \cdot \rho_i} \right) \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{rkpm})} \quad (27)$$

其中 $\nabla_i W_{ij}^{(\text{rkpm})} = \nabla_i W^{(\text{rkpm})}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h_{ij})$, 算符 ∇_i 的下标表示对 $\mathbf{r}_i$ 求导。

4 PECM 计算格式

4.1 核函数

PECM 对动量方程构造了如下新型核函数:

$$\begin{aligned} W^{(\text{pecm})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) = & C^{(\text{pecm})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \cdot \\ & W^{(\text{sph})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) \end{aligned} \quad (28)$$

n_c 阶校正函数 $C^{(\text{pecm})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)$ 的求解基于

PECM 的相容性条件(式(29)~式(30)), 其离散形式为式(31)~式(32)。

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') W^{(\text{pecm})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' = 1 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') W^{(\text{pecm})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^k d\mathbf{r}' = & 0, \\ & k = 1, 2, \cdots, n_c \end{aligned} \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^N b_j \rho_j C_{ij}^{(\text{pecm})} W_{ij}^{(\text{sph})} = 1 \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^N b_j \rho_j C_{ij}^{(\text{pecm})} W_{ij}^{(\text{sph})} \mathbf{r}_{ij}^k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n_c \quad (32)$$

PECM 的质团对应 RKPM 的粒子, 它们的校正函数在结构形式上无差别。如采用 $\mathbf{r}_{ij}$ 的多项式, 则对 $n_c = 2$ 的三维问题, 有

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(\text{pecm})} = & \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ (x_i - x_j) \\ (y_i - y_j) \\ (z_i - z_j) \\ (x_i - x_j)(x_i - x_j) \\ (x_i - x_j)(y_i - y_j) \\ (x_i - x_j)(z_i - z_j) \\ (y_i - y_j)(y_i - y_j) \\ (y_i - y_j)(z_i - z_j) \\ (z_i - z_j)(z_i - z_j) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{令} \quad & \mathbf{f} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ & \mathbf{a} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9]^T \end{aligned} \quad (34)$$

则式(31)~式(32)可合并改写为

$$\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (35)$$

其中矩阵 $\mathbf{M} = (M_{kl})_{10 \times 10}$ 的分量为

$$\begin{aligned} M_{kl} = & \sum_{j=1}^N b_j \rho_j W_{ij}^{(\text{sph})} (x_i - x_j)^{\alpha_{kl}} \cdot \\ & (y_i - y_j)^{\beta_{kl}} (z_i - z_j)^{\gamma_{kl}} \end{aligned} \quad (36)$$

式中上标 $\alpha_{kl}, \beta_{kl}, \gamma_{kl}$ 的取值范围为 $0 \sim 4$ 。由式(35)求得 $\mathbf{a}$ 后, 可由式(33)和式(28)求得 $C_{ij}^{(\text{pecm})}$ 和 $W_{ij}^{(\text{pecm})}$ 。

4.2 模化因子

PECM 新增式(38)和式(40)两个模化因子, 同时也对 SPH 原有的模化因子进行了改造, 因为核函数的改变会引起离散方程和模化因子在形式上的改变。

压强模化因子增加到两个, 分别为

$$\Pi_{ij,1}^{(\text{pecm})} = \begin{cases} (-\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2) \rho_{ij} & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) < 0 \\ 0 & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \geq 0 \end{cases} \quad (37)$$

$$\Pi_{ij,2}^{(\text{pecm})} = \begin{cases} (-\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2) \hat{\rho}_{ij} & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) < 0 \\ 0 & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \geq 0 \end{cases} \quad (38)$$

热流模化因子为

$$\mathbf{H}_{ij}^{(\text{pecm})} = \begin{cases} \frac{\zeta_{ij} \rho_{ij} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 + \eta h_{ij}^2} & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) < 0 \\ 0 & (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \geq 0 \end{cases} \quad (39)$$

速度模化因子为

$$\Phi_{ij}^{(\text{pecm})} = \delta h_{ij} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) (p_i - p_j) / \{[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 + \theta h_{ij}^2] c_{ij} \rho_{ij}\} \quad (40)$$

在式(37)~式(40)中, $\alpha, \beta, \epsilon, \eta, g_1, g_2, \mu_{ij}, \zeta_{ij}, c_{ij}, \rho_{ij}, h_{ij}$ 同 SPH 中的对应参数, δ, θ 用于构造速度模化因子 $\Phi_{ij}^{(\text{pecm})}, \hat{\rho}_{ij} = \rho_i \rho_j / (\rho_i + \rho_j)$ 。

4.3 离散方程

质量方程

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_{j=1}^N b_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j + \Phi_{ij}^{(\text{pecm})}) \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{rkpm})} \quad (41)$$

动量方程

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N b_j (p_j + \Pi_{ij,1}^{(\text{pecm})}) \nabla_i W_{ij}^{(\text{pecm})} \quad (42)$$

能量方程

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N b_j [(p_i + \Pi_{ij,2}^{(\text{pecm})}) (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j + \Phi_{ij}^{(\text{pecm})}) + \mathbf{H}_{ij}^{(\text{pecm})}] \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{rkpm})} \quad (43)$$

光滑长度演化方程

$$\frac{dh_i}{dt} = - \frac{h_i}{N_{sd}} \sum_{j=1}^N b_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j + \Phi_{ij}^{(\text{pecm})}) \cdot \nabla_i W_{ij}^{(\text{rkpm})} \quad (44)$$

5 先验分析

本文基于物理认识和离散方程的形式对数值方法开展定性的先验分析,先验分析结果与基于程序验证的后验分析结果达到了相互印证的效果。

基于核估计和 Von Neumann 思想的无网格方法,通过对右端项施加核估计算符,将微分方程变为积分形式的离散方程,然后在离散方程中添加

模化因子。构造离散方程有三个关键技术环节:其一是选择什么核函数;其二是添加什么模化因子;其三是确定哪些物理参数作为离散方程中核估计算符的作用对象。

核函数的选择应该让近似估计能够体现下一时间步内相邻微元体的相互作用。控制方程的右端虽然只包含对空间坐标的求导,但不能把右端项视为静止的空间导函数,因为它们同时又作为其他变量的时间导数而参与时间推进求解。RK-PM 与 SPH 一样,对所有控制方程均通过核函数与微元体体积来分配近似估计所需的权重,这对包含速度散度的质量方程、能量方程和光滑长度演化方程是合适的,但对包含压强梯度的动量方程却不合适。速度散度仅仅体现粒子在体积上的收缩或膨胀,对下一时刻粒子的移动和相互作用不产生直接影响,因此适合基于体积的权重分配。从流体动量方程的形式上看,速度变化的驱动因素只有压强梯度,但微元体之间的运动是相互牵制的,速度的变化由牛顿第二定律和连续介质的应变协调方程共同决定。尽管控制方程组中没有应变协调方程,但该方程隐含于介质的连续性假设中,有网格方法通过角点连成的网格自动满足应变协调方程。如用无网格方法对动量方程进行离散,基于质量的权重分配也能够正确表现近邻质团相互作用条件下每个质团的加速度,从而使动量方程兼顾应变协调方程,而基于体积的权重分配则不具备这个能力。另外,从动量方程的离散形式上也能够看出,基于体积的核估计方案容易产生和放大误差,而基于质量的核估计方案能够有效控制误差的产生和传播^[14]。

不同的核函数也使计算方法对间断问题具有不同的适应能力。速度和压强的间断是引发数值误差的两个重要间断模式,它们的空间导数显性地存在于控制方程中。速度间断通过质量方程、状态方程和压强模化因子诱导出压强增量,如果某处压强被高估,则下一时刻会因速度散度的增加导致密度下降,继而由状态方程给出一个较低的压强,误差演化呈现负反馈,有利于计算过程的稳定。压强间断通过动量方程诱导出速度增量,如果动量方程与应变协调方程相容,速度增量的高估会正确地激励出与速度增量方向相同的压强梯度,从而使下一时刻该方向的速度增量下降,误差演化呈现负反馈,也能保证计算过程的稳定,但如果动量方程与应变协调方程不相容,速度增量的高估将不能正确地激励出与速度增量方向相同

的压强梯度,甚至可能激励出相反的压强梯度,从而使误差因正反馈演化机制而得不到有效抑制,计算过程可能失稳。相对于速度和压强,密度和内能的间断是引发数值误差的次要间断模式。两者相比,数值误差对密度间断更加敏感,因为密度体现着物质对各种物理量的承载,常出现在空间导数的系数项中。

模化因子用以帮助数值模拟捕捉间断位置并求解间断面两侧的物理量,因间断面上发生的物理现象具有比微元体更小的时空尺度,无法通过模拟环节来体现。不恰当的压强模化因子会通过能量方程在间断面上产生偏离真解的虚假壁热现象,热流模化因子用以向周围粒子均摊壁热产生的这些虚假内能,虽然它能削平内能的数值尖峰,但不能消减壁热所致总能量的增加,因此最好从源头上抑制壁热的产生。RKPM 在能量方程中采用了与动量方程相同的压强模化因子,但从物理上看,该因子不适于能量方程,因为在大密度比条件下,会产生非常强烈的壁热现象,应该基于轻重物质的碰撞规律建立适用于能量方程的压强模化因子。另外,根据压强和速度的连续性条件以及两者之间的影响关系,可基于压强梯度建立针对速度修正的模化因子,以加强数值方法对误差波的抑制能力。当速度间断对应背离运动而造成拉伸和膨胀波时,压强和热流的模化项为零,但速度模化因子可继续对数值波动产生抑制作用。

正确选择离散方程中核估计算符的作用对象,可有效避免物理量的虚假数值耗散。空间导数涉及周围函数值,其核估计算子将表现为这些函数值的加权求和形式。由于质量方程和能量方程只含有速度的导数项,其对应的核估计算子不应该作用于密度和压强,否则将产生数值耗散并破坏密度和内能所客观存在的间断性。

基于以上分析以及不同方法对应的设计思想和离散格式,可以得到如下先验认识。

1) RKPM:对所有方程均采用基于体积的核估计方案,动量方程的求解不能兼顾粒子之间的相互作用或应变协调方程,容易产生较大误差甚至导致计算不稳定;能量方程采用与动量方程相同形式的压强模化因子,当间断面存在大密度比时,人为黏性功被过高估计,所产生的壁热现象会导致严重的数值误差甚至计算不稳定;将相邻粒子的质量和密度也纳入质量方程和能量方程核估计算符的作用对象,会产生明显的数值耗散,不能

准确表达密度和内能所客观存在的间断性。

2) PECM:对动量方程采用基于质量的核估计方案,能兼顾质团的相互作用以及应变协调方程,可显著改善动量方程求解的稳定性和准确性。基于压强和速度的连续性条件,新增针对速度的模化因子;根据轻重物质碰撞时撞击力大小受轻物质主导的物理启发,新增适用于能量方程的压强模化因子。这两个模化因子能够从源头上有效抑制壁热等数值波动现象,显著提高大密度比、强间断问题数值模拟的稳定性和准确性。将相邻粒子的质量、密度和压强移出质量、能量和光滑长度方程的核估计算符,更加忠实于物理规律,能有效避免数值耗散,并准确表达不同材料在密度和内能上客观存在的间断性。

6 黎曼问题精确解

本文采用凝聚介质实用状态方程

$$p = c_0^2(\rho - \rho_0) + (\gamma - 1)\rho e \tag{45}$$

式中 c_0^2 、 ρ_0 、 γ 为模型参数,其对应的声速为

$$c = \sqrt{c_0^2 + (\gamma - 1)(e + p/\rho)} \tag{46}$$

由不同黎曼问题形成的一维实体模型分左、右两个区域,左、右区初始参数分别对应下标“1”和“2”,其波后参数分别对应下标“3”和“4”,其膨胀波内的参数分别对应下标“5”和“6”。两区均用 D 表示波速,用下标“h”和“t”表示波头和波尾参数。

令 $\bar{\omega}_1 = c_{01}^2\rho_{01}/(c_1^2\rho_1)$, $\bar{\omega}_2 = c_{02}^2\rho_{02}/(c_2^2\rho_2)$, 则初始间断面处形成真空的条件为

$$v_2 - v_1 \geq \frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} \left(1 - \bar{\omega}_1^{\gamma_1 - 1/2\gamma_1} \right) + \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} \left(1 - \bar{\omega}_2^{\gamma_2 - 1/2\gamma_2} \right) \tag{47}$$

记 $\alpha_1 = v_1 + 2c_1/(\gamma_1 - 1)$, $\alpha_2 = v_2 - 2c_2/(\gamma_2 - 1)$, x_d 为初始间断位置,并基于膨胀波内时空坐标 t 和 x 定义 $w = (x - x_d)/t$, 则根据激波和膨胀波的关系式,可分别得到两区参数的精确解式(48)~式(87)。

其中左区激波解为

$$v_3 = v_1 - \frac{2(p_3 - p_1)}{\sqrt{\rho_1[2(\gamma_1 - 1)p_1 + 2(\gamma_1 + 1)p_3 + 4c_{01}^2\rho_{01}]}} \tag{48}$$

$$\rho_3 = \rho_1 \frac{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_3 + 2c_{01}^2\rho_{01}}{(\gamma_1 + 1)p_1 + (\gamma_1 - 1)p_3 + 2c_{01}^2\rho_{01}} \tag{49}$$

$$c_3 = \left(\frac{\gamma_1 p_3 + c_{01}^2 \rho_{01}}{\rho_3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (50)$$

$$e_3 = \frac{p_3 - c_{01}^2 (\rho_3 - \rho_{01})}{(\gamma_1 - 1) \rho_3} \quad (51)$$

$$D_{h1} = D_{t1} = \frac{\rho_3 v_3 - \rho_1 v_1}{\rho_3 - \rho_1} \quad (52)$$

右区激波解为

$$\frac{v_4 = v_2 + \frac{2(p_4 - p_2)}{\sqrt{\rho_2 [2(\gamma_2 - 1)p_2 + 2(\gamma_2 + 1)p_4 + 4c_{02}^2 \rho_{02}]}}}{\quad} \quad (53)$$

$$\rho_4 = \rho_2 \frac{(\gamma_2 - 1)p_2 + (\gamma_2 + 1)p_4 + 2c_{02}^2 \rho_{02}}{(\gamma_2 + 1)p_2 + (\gamma_2 - 1)p_4 + 2c_{02}^2 \rho_{02}} \quad (54)$$

$$c_4 = \left(\frac{\gamma_2 p_4 + c_{02}^2 \rho_{02}}{\rho_4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (55)$$

$$e_4 = \frac{p_4 - c_{02}^2 (\rho_4 - \rho_{02})}{(\gamma_2 - 1) \rho_4} \quad (56)$$

$$D_{h2} = D_{t2} = \frac{\rho_4 v_4 - \rho_2 v_2}{\rho_4 - \rho_2} \quad (57)$$

左区膨胀波解为

$$v_3 = v_1 - \frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} \left[\left(\frac{\gamma_1 p_3 + c_{01}^2 \rho_{01}}{\gamma_1 p_1 + c_{01}^2 \rho_{01}} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}} - 1 \right] \quad (58)$$

$$c_3 = c_1 \left(\frac{\gamma_1 p_3 + c_{01}^2 \rho_{01}}{\gamma_1 p_1 + c_{01}^2 \rho_{01}} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}} \quad (59)$$

$$\rho_3 = \rho_1 \left(\frac{c_3}{c_1} \right)^{\frac{2}{\gamma_1 - 1}} \quad (60)$$

$$D_{t1} = \alpha_1 - \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} c_3 \quad (61)$$

$$D_{h1} = v_1 - c_1 \quad (62)$$

$$c_5 = \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} (\alpha_1 - w) \quad (63)$$

$$v_5 = w + c_5 \quad (64)$$

$$\rho_5 = \rho_1 \left(\frac{c_5}{c_1} \right)^{\frac{2}{\gamma_1 - 1}} \quad (65)$$

$$p_5 = \left(\frac{c_5}{c_1} \right)^{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} \left(p_1 + \frac{c_{01}^2 \rho_{01}}{\gamma_1} \right) - \frac{c_{01}^2 \rho_{01}}{\gamma_1} \quad (66)$$

$$e_5 = \frac{p_5 - c_{01}^2 (\rho_5 - \rho_{01})}{(\gamma_1 - 1) \rho_5} \quad (67)$$

左区出现真空时的波尾参数为

$$p_{t1} = 0 \quad (68)$$

$$c_{t1} = c_1 \left(\frac{c_{01}^2 \rho_{01}}{\gamma_1 p_1 + c_{01}^2 \rho_{01}} \right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}} \quad (69)$$

$$\rho_{t1} = \rho_1 \left(\frac{c_{t1}}{c_1} \right)^{\frac{2}{\gamma_1 - 1}} \quad (70)$$

$$v_{t1} = v_1 + \frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_{t1}}{\gamma_1 - 1} \quad (71)$$

$$D_{t1} = v_{t1} - c_{t1} \quad (72)$$

右区膨胀波解为

$$v_4 = v_2 + \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} \left[\left(\frac{\gamma_2 p_4 + c_{02}^2 \rho_{02}}{\gamma_2 p_2 + c_{02}^2 \rho_{02}} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}} - 1 \right] \quad (73)$$

$$c_4 = c_2 \left(\frac{\gamma_2 p_4 + c_{02}^2 \rho_{02}}{\gamma_2 p_2 + c_{02}^2 \rho_{02}} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}} \quad (74)$$

$$\rho_3 = \rho_2 \left(\frac{c_4}{c_2} \right)^{\frac{2}{\gamma_2 - 1}} \quad (75)$$

$$D_{t2} = \alpha_2 + \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} c_4 \quad (76)$$

$$D_{h2} = v_2 + c_2 \quad (77)$$

$$c_6 = \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} (w - \alpha_2) \quad (78)$$

$$v_6 = w + c_6 \quad (79)$$

$$\rho_6 = \rho_2 \left(\frac{c_6}{c_2} \right)^{\frac{2}{\gamma_2 - 1}} \quad (80)$$

$$p_6 = \left(\frac{c_6}{c_2} \right)^{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 - 1}} \left(p_2 + \frac{c_{02}^2 \rho_{02}}{\gamma_2} \right) - \frac{c_{02}^2 \rho_{02}}{\gamma_2} \quad (81)$$

$$e_6 = \frac{p_6 - c_{02}^2 (\rho_6 - \rho_{02})}{(\gamma_2 - 1) \rho_6} \quad (82)$$

右区出现真空时的波尾参数为

$$p_{t2} = 0 \quad (83)$$

$$c_{t2} = c_2 \left(\frac{c_{02}^2 \rho_{02}}{\gamma_2 p_2 + c_{02}^2 \rho_{02}} \right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}} \quad (84)$$

$$\rho_{t2} = \rho_2 \left(\frac{c_{t2}}{c_2} \right)^{\frac{2}{\gamma_2 - 1}} \quad (85)$$

$$v_{t2} = v_2 - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} + \frac{2c_{t2}}{\gamma_2 - 1} \quad (86)$$

$$D_{t2} = v_{t2} + c_{t2} \quad (87)$$

精确解用于同数值解的对比分析,其求解过程是,首先由式(47)判断是否形成真空,形成真空则分别通过式(62)~式(72)与式(77)~式(87)求解两侧膨胀波,否则根据 $v_3 = v_4$ 和 $p_3 = p_4$ 的条件迭代求出两侧共享的速度和压强,并判断两侧分别形成激波还是膨胀波,然后根据对应关系式求出两侧其他变量的精确解。这些结果同样适用于理想气体状态方程,因为它是凝聚介质实用状态方程的退化形式。

7 验证方法

稳定性和准确性是数值方法可信性的重要内涵,拟参照验证与确认(verification & validation, V&V)中程序验证的技术标准对程序代码的正确性以及数值方法的稳定性和准确性进行后验评估。技术途径有三:其一是通过各时刻计算结果形成的动态图像观察计算的稳定性;其二是通过特定时刻计算结果的静态图像分析计算的准确性;其三是通过特定时刻数值误差随离散尺度的变化趋势分析计算的收敛性。大量算例的动态分析表明,PECM 能够从包含各类强间断的初始条件中很快演化出稳定解,而 RKPM 往往产生剧烈的数值波动并容易出现不稳定和算不下去的现象。本文主要通过后面的两个技术途径以及下面介绍的方法展开对 PECM 的验证和评估。

数值格式的收敛指的是离散方程的精确解能够随离散尺度趋零而逼近于微分方程的精确解。令 Δx 为初始离散尺度, $u_{\Delta x}$ 为数值方法的精确解, u_* 为微分方程的精确解,则离散误差 $\epsilon_{\Delta x}$ 和算法的收敛可分别表示为

$$\epsilon_{\Delta x} = u_{\Delta x} - u_*$$

(88)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon_{\Delta x} = 0$$

(89)

由于舍入误差相对很小可忽略不计,本文将程序输出的数值解和微分方程的精确解分别视作 $u_{\Delta x}$ 和 u_* 。

由文献[2],数值解可基于收敛极限进行泰勒展开

$$u_{\Delta x} = u_{\Delta x=0} + \frac{\partial u}{\partial (\Delta x)} \Big|_{\Delta x=0} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial (\Delta x)^2} \Big|_{\Delta x=0} \frac{(\Delta x)^2}{2} + O[(\Delta x)^3]$$

(90)

表 1 实体模型参数

Table 1 Parameters of entity models

分区	模型	初始分布 x/m	初始密度/ $10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	初始内能/ 10^6 (J/kg)	初始压强/ 10^{10} Pa	初始速度/ (km/s)
1	1	$[-1.0, -0.2]$	2.500	6.496	3.500	2.000
	2	$[-1.0, -0.2]$	2.000	5.000	2.000	2.000
	3	$[-1.0, 0]$	2.000	5.000	2.000	0
	4	$[-1.0, 0]$	2.500	6.496	3.500	2.000
	5	$[-1.0, 0]$	2.500	7.000	3.500	0
	6	$[-1.0, 0]$	2×10^{-4}	10.000	10^{-4}	1.000
	7	$[-1.0, -0.2]$	2.500	6.496	3.500	-1.000
	8	$[-1.0, 0]$	2.500	6.496	3.500	-4.000
	9	$[-1.0, 0]$	2.500	6.496	3.500	-8.000

对收敛的数值格式, $u_{\Delta x=0} = u_*$ 。当收敛精度等级为 ξ 时,低于 ξ 阶的误差项为零,则有

$$\epsilon_{\Delta x} = g_{\xi} (\Delta x)^{\xi} + O[(\Delta x)^{\xi+1}]$$

(91)

使用误差的绝对值并对两边取对数,有

$$\ln |\epsilon_{\Delta x}| \approx \ln g_{\xi} + \xi \ln \Delta x$$

(92)

对应不同离散尺度,式(92)将形成 ξ 的多个线性方程,可通过超定方程的二范数解求 ξ 的估计值 $\hat{\xi}$ 。本文以各个区域中绝对值最大的误差代表该区域的数值误差,并据此实施量化评估。

8 程序验证

按照程序验证的技术思想,应当根据模拟对象复杂度由低到高的层级顺序在物理系统中开展可信度评估,以提供有效和充分的证据支持。本文中的验证工作对应底部的基础层级,该层级中的一维模型摒除了物理建模和高维流动对计算结果的影响,可用于对计算方法存在的基本问题实施有效的隔离和解析。鉴于篇幅所限,根据不同应用背景以及问题诊断的需要,构造了 9 个包含不同间断特性的一维模型,这些模型也基本体现了无网格方法在可压流模拟中遇到的各种挑战,所对应的实体模型和物理模型参数分别列于表 1 和表 2,有关微元体离散的初始尺寸 Δx 、初始光滑长度 h_0 、时间步长因子 τ 以及与模化因子有关的计算参数列于表 3。

除了表 3 所示的计算参数之外,有关 PECM 的程序代码没有任何与特定模型相关联的人为控制参数或控制语句,不同模型所对应的不同演化规律,包括界面分离等,完全由统一的计算方法自动预测。

续表

分区	模型	初始分布 x/m	初始密度/ $10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	初始内能/ $10^6(\text{J}/\text{kg})$	初始压强/ 10^{10} Pa	初始速度/ (km/s)
2	1	$[-0.2, 1.0]$	2.500	6.496	3.500	-1.000
	2	$[-0.2, 1.0]$	20.000	0.250	2.000	-1.000
	3	$[0, 1.0]$	20.000	0.250	2.000	0
	4	$[0, 1.0]$	20.000	0	0	-1.000
	5	$[0, 1.0]$	20.000	0	0	0
	6	$[0, 1.0]$	20.000	0.250	2.000	-1.000
	7	$[-0.2, 1.0]$	2.000	2.400	2.500	1.000
	8	$[0, 1.0]$	2.000	2.400	2.500	2.834
	9	$[0, 1.0]$	2.000	2.400	2.500	6.000

表 2 物理模型参数
Table 2 Parameters of physics models

分区	模型	状态方程	$c_0^2/10^6(\text{m}^2/\text{s}^2)$	$\rho_0/10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	$\gamma(1)$
1	1	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	3.600	1.800	3.000
	2	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	2.250	2.000	3.000
	3	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	2.250	2.000	3.000
	4	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	3.600	1.800	3.000
	5	$p=(\gamma-1)\rho e$	0	0	3.000
	6	$p=(\gamma-1)\rho e$	0	0	1.500
	7	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	3.600	1.800	3.000
	8	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	3.600	1.800	3.000
	9	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	3.600	1.800	3.000
2	1	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	3.600	1.800	3.000
	2	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	25.000	20.000	5.000
	3	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	25.000	20.000	5.000
	4	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	15.000	20.000	5.000
	5	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	15.000	20.000	5.000
	6	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	25.000	20.000	5.000
	7	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	2.500	1.600	6.000
	8	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	2.500	1.600	6.000
	9	$p=c_0^2(\rho-\rho_0)+(\gamma-1)\rho e$	2.500	1.600	6.000

表 3 数值计算参数
Table 3 Parameters of numerical computation

$\Delta x/\text{mm}$	h_0/mm	n_c	τ	α	β	ϵ	g_1	g_2	η	δ	θ
0.25~1.00	1.5 Δx	0	0.1	1.0	2.0	0.01	1.0	1.0	0.01	0.1	0.01

模型 1 对应同一种高压物质以较高的相对速度迎面相撞,计算结果和收敛性量化结果如图 1 和表 4。图 1 中的横坐标 x 代表质团的位置, t 代

表物理过程的演化时间,RKPM 和 PECM 的数值离散尺度 x 均取 1.0mm,其他图同此。该模型的间断类型比较简单,即只有速度间断。RKPM

的缺陷在该模型中暴露不明显,只在撞击面附近产生一定程度的数值振荡和壁热。壁热导致的密度下降不能很快恢复,热流模化因子对内能的抹平导致波后内能的整体偏高。PECM 的速度模化因子能够从源头上对壁热产生抑制作用,计算结果更加准确。整体上看两种方法对该模型的计算结果均接近精确解,两种方法所对应程序代码的正确性可借该模型得以验证。

模型 2 对应压强相同的不同物质迎面相撞,计算结果和收敛性量化结果如图 2 和表 5。该模型存在密度间断以及状态方程参数的差别。速度间断与密度间断使 RKPM 产生明显的数值波动和壁热现象。左区界面附近的密度和速度被严重低估,内能和压强被严重高估。右区的密度、内能、压强和速度均被严重低估。PECM 与精确解比较一致,能准确刻画界面两边截然不同的密度和内能,压强和速度保持着较好的连续性。

模型 3 中两区的初始压强和初始速度均匀一

致,但存在密度、内能和状态方程的间断,计算结果和收敛性量化结果如图 3 和表 6。因不考虑传热,力平衡状态应该一直保持下去。RKPM 在间断处出现明显误差,并产生虚假数值波,根据其计算格式,数值误差当首先来自动量方程。该模型的 PECM 结果与精确解完全一致。

模型 4 模拟高压弹药高速撞击重物质,计算结果和收敛性量化结果如图 4 和表 7。压强间断容易导致计算不稳定,但碰撞挤压对计算的稳定性有积极作用。如果对光滑长度的变化强行限制在初值的 2 倍以内,RKPM 才有本文的结果,界面上有明显的壁热和压强跳动,界面位置偏右但两边尚能贴合,激波位置和波后参数有明显误差,如果 RKPM 不对光滑长度的变化做上述限制,则界面出现一定的虚假分离,算不出重物质受冲击后被压缩和推动的效果。PECM 结果与精确解符合得较好。

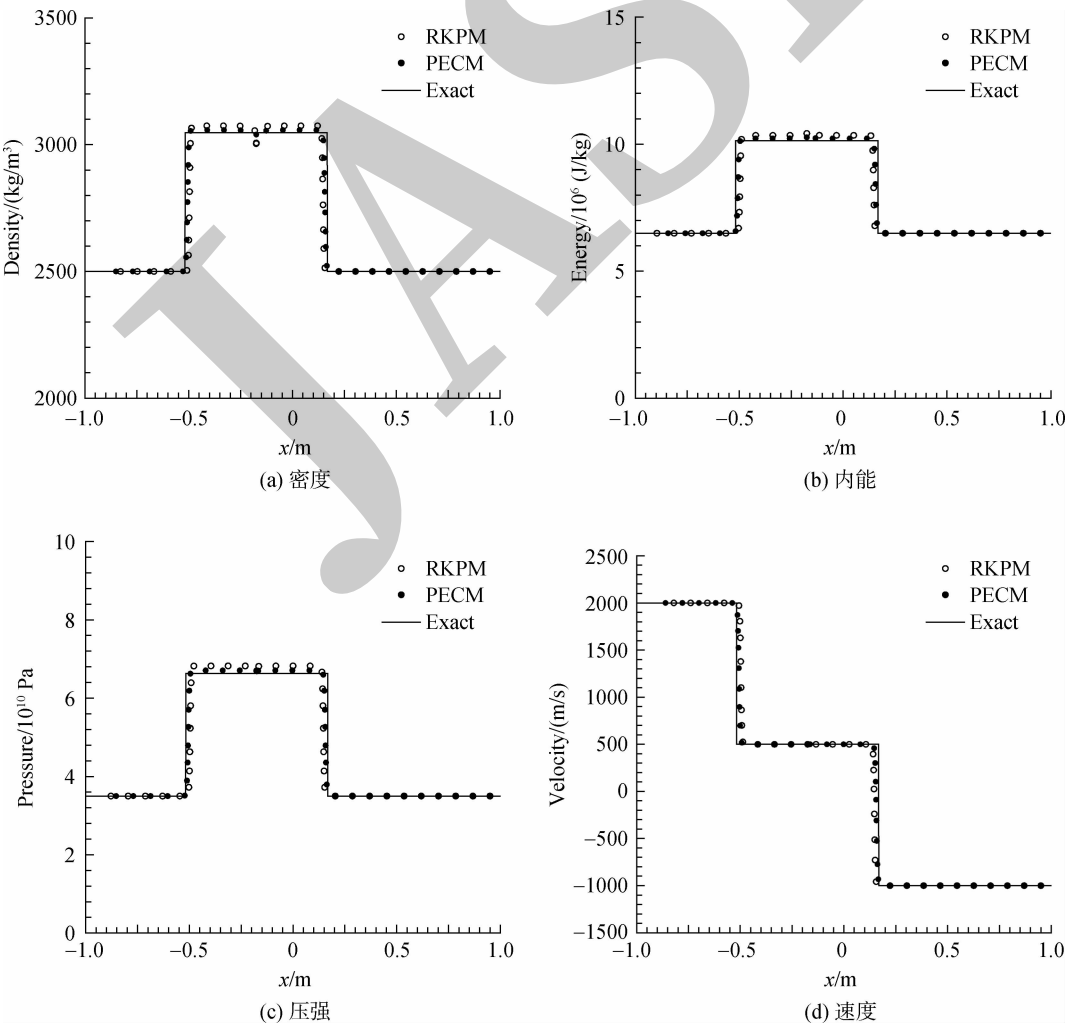


图 1 模型 1 的数值计算结果 ($t=50.00\mu\text{s}$)

Fig.1 Numerical results about model 1 ($t=50.00\mu\text{s}$)

表 4 模型 1 的误差和收敛精度等级

Table 4 Errors and convergence accuracy orders of model 1

参数	精确解	数值解误差			$\hat{\xi}$
		$\Delta x=1.00\text{ mm}$	$\Delta x=0.50\text{ mm}$	$\Delta x=0.25\text{ mm}$	
$\rho_1/(\text{kg}/\text{m}^3)$	3.0479×10^3	12.1700	12.0500	11.9500	1.3200×10^{-2}
$\rho_2/(\text{kg}/\text{m}^3)$	3.0479×10^3	12.1700	12.0500	11.9500	1.3200×10^{-2}
$e_1/(\text{J}/\text{kg})$	1.0138×10^7	1.5060×10^5	1.0710×10^5	5.6980×10^4	0.7011
$e_2/(\text{J}/\text{kg})$	1.0138×10^7	1.5060×10^5	1.0710×10^5	5.6980×10^4	0.7011
p_1/Pa	6.6291×10^{10}	9.4770×10^8	9.1730×10^8	8.8560×10^8	4.8900×10^{-2}
p_2/Pa	6.6291×10^{10}	9.4770×10^8	9.1730×10^8	8.8560×10^8	4.8900×10^{-2}
$v_1/(\text{m}/\text{s})$	5.0000×10^2	0.2550	9.5000×10^{-2}	2.0000×10^{-2}	1.8362
$v_2/(\text{m}/\text{s})$	5.0000×10^2	0.2550	9.5000×10^{-2}	2.0000×10^{-2}	1.8362

注:参数的下标“1”和“2”分别代表左右两个分区,下文同。

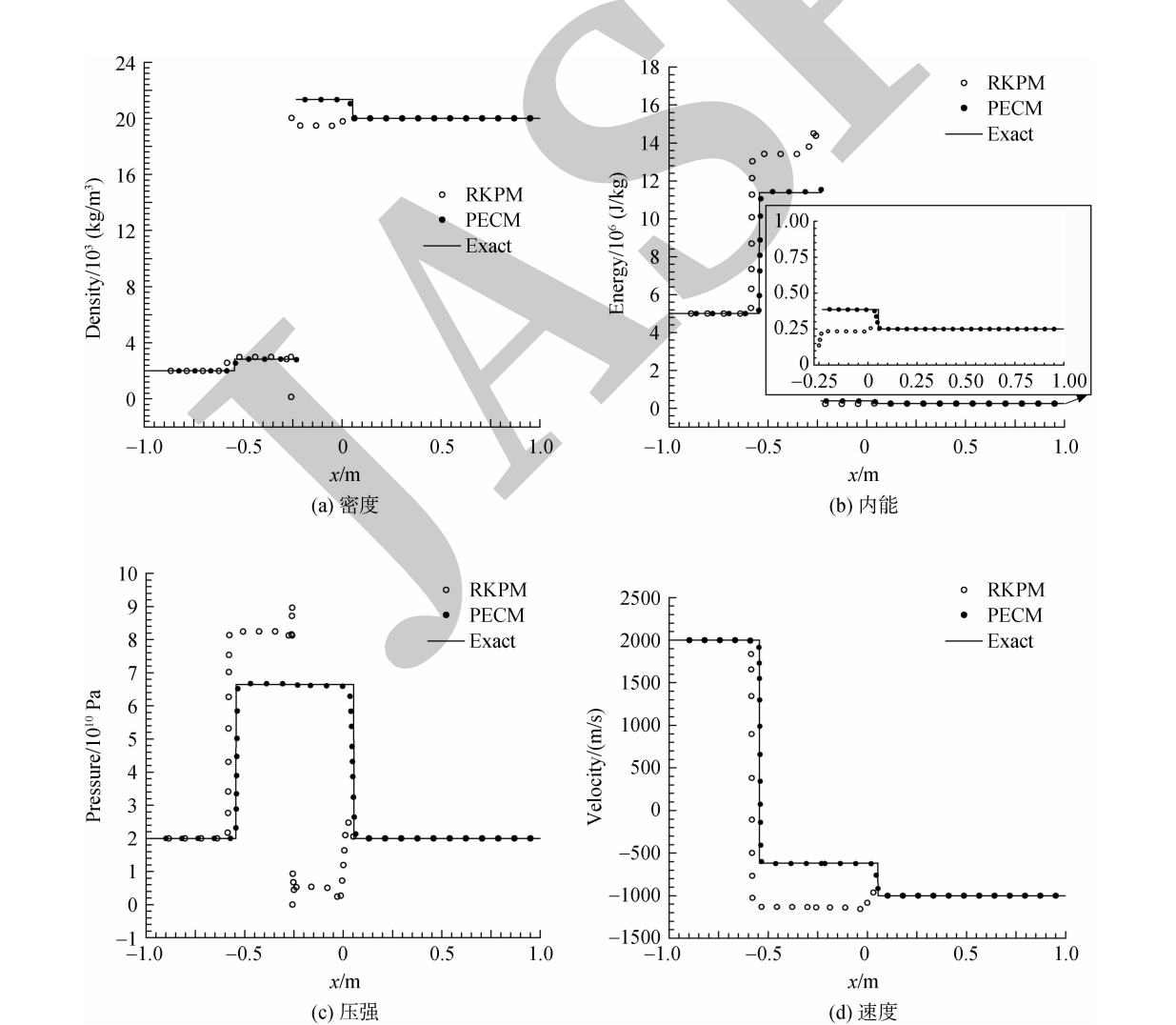


图 2 模型 2 的数值计算结果($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

Fig. 2 Numerical results about model 2 ($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

表 5 模型 2 的误差和收敛精度等级
Table 5 Errors and convergence accuracy orders of model 2

参数	精确解	数值解误差			$\hat{\xi}$
		$\Delta x=1.00\text{ mm}$	$\Delta x=0.50\text{ mm}$	$\Delta x=0.25\text{ mm}$	
$\rho_1/(\text{kg}/\text{m}^3)$	2.8373×10^3	35.5000	26.2700	18.3100	0.4776
$\rho_2/(\text{kg}/\text{m}^3)$	2.1341×10^4	64.1000	49.5000	24.8000	0.6850
$e_1/(\text{J}/\text{kg})$	1.1378×10^7	2.3130×10^5	2.0220×10^5	1.7500×10^5	0.2012
$e_2/(\text{J}/\text{kg})$	3.8578×10^5	7.7710×10^3	5.9345×10^3	4.5095×10^3	0.3925
p_1/Pa	6.6451×10^{10}	8.7890×10^8	8.0710×10^8	7.4520×10^8	0.1190
p_2/Pa	6.6451×10^{10}	3.6750×10^8	3.1780×10^8	2.6860×10^8	0.2261
$v_1/(\text{m}/\text{s})$	1.6801×10^2	1.1830	1.1070	1.0340	9.7100×10^{-2}
$v_2/(\text{m}/\text{s})$	1.6801×10^2	1.0710	1.0020	0.9232	0.1071

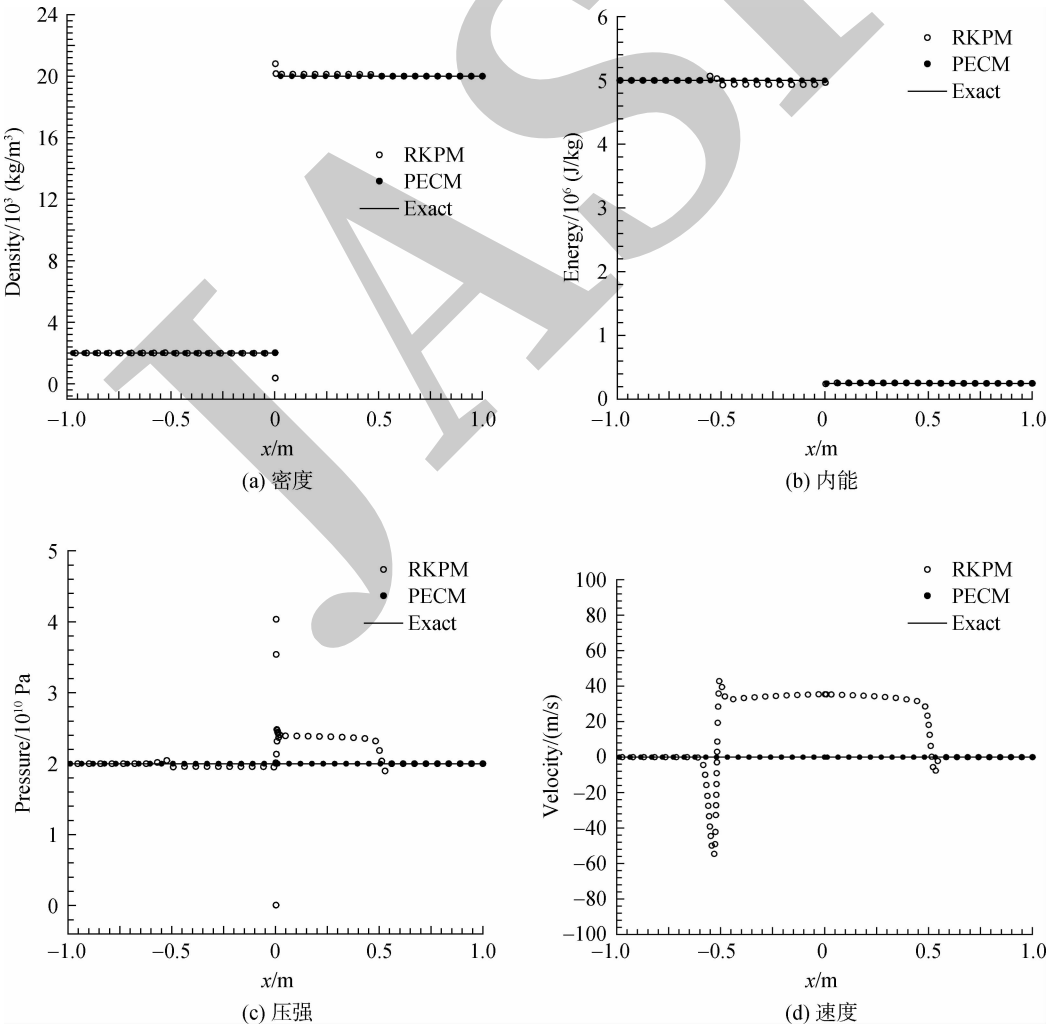


图 3 模型 3 的数值计算结果($t=100.00\mu\text{s}$)
Fig. 3 Numerical results about model 3 ($t=100.00\mu\text{s}$)

表 6 模型 3 的误差和收敛精度等级

Table 6 Errors and convergence accuracy orders of model 3

参数	精确解	数值解误差			$\hat{\xi}$
		$\Delta x=1.00\text{ mm}$	$\Delta x=0.50\text{ mm}$	$\Delta x=0.25\text{ mm}$	
$\rho_1/(\text{kg}/\text{m}^3)$	2.0000×10^3	0	0	0	
$\rho_2/(\text{kg}/\text{m}^3)$	2.0000×10^4	0	0	0	
$e_1/(\text{J}/\text{kg})$	5.0000×10^6	0	0	0	
$e_2/(\text{J}/\text{kg})$	2.5000×10^5	0	0	0	
p_1/Pa	2.0000×10^{10}	0	0	0	
p_2/Pa	2.0000×10^{10}	0	0	0	
$v_1/(\text{m}/\text{s})$	0	0	0	0	
$v_2/(\text{m}/\text{s})$	0	0	0	0	

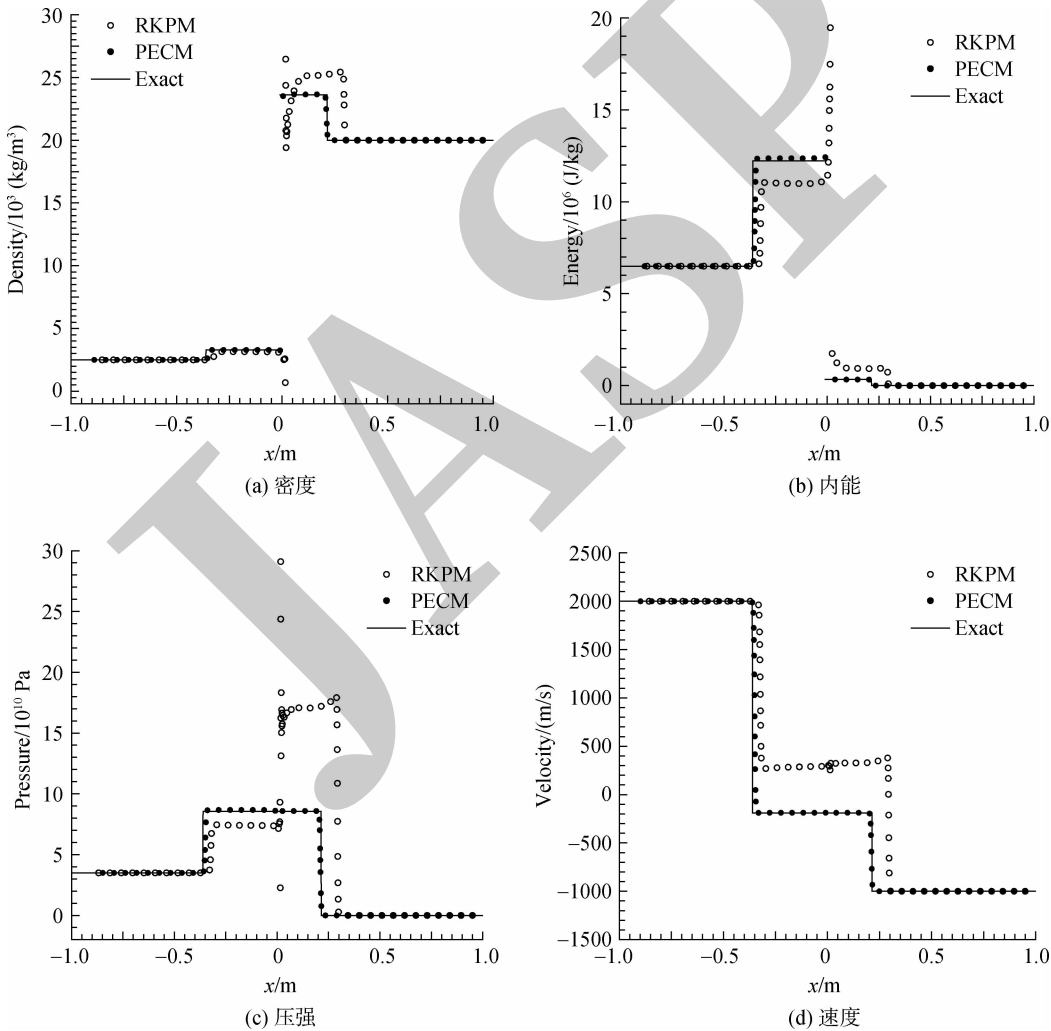


图 4 模型 4 的数值计算结果($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

Fig. 4 Numerical results about model 4 ($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

模型 5 模仿高压气体从静止开始推动重物质,两边初速度均为零,计算结果和收敛性量化结果如图 5 和表 8。在压强间断和密度间断的联合作用下,RKPM 计算出现严重的不稳定,对光滑

长度的变化尝试了很多形式的限制,物质界面均出现虚假分离,波后参数严重失真。PECM 计算稳定且与精确解符合得较好。

模型 6 模仿高压重物质高速撞击低压稀薄气

体,初始密度比为 10 万,计算结果和收敛性量化结果如图 6 和表 9。由于密度比太大,RKPM 产生剧烈数值波动,密度、内能和压强出现负值,粒子速度的严重高估导致时间步长趋于零,无法实

现求解过程,如强制时间步长不小于 10^{-12} s,则 RKPM 才有本文的结果,大部分粒子仍跑到计算域之外,只留下了少部分粒子。PECM 计算稳定且与精确解符合得较好。

表 7 模型 4 的误差和收敛精度等级
Table 7 Errors and convergence accuracy orders of model 4

参数	精确解	数值解误差			$\hat{\xi}$
		$\Delta x=1.00\text{ mm}$	$\Delta x=0.50\text{ mm}$	$\Delta x=0.25\text{ mm}$	
$\rho_1/(\text{kg}/\text{m}^3)$	3.2790×10^3	11.4100	9.5700	7.9500	0.2606
$\rho_2/(\text{kg}/\text{m}^3)$	2.3630×10^4	2.2920×10^2	1.8260×10^2	1.2430×10^2	0.4414
$e_1/(\text{J}/\text{kg})$	1.2220×10^7	2.0350×10^5	1.5370×10^5	1.0440×10^5	0.4815
$e_2/(\text{J}/\text{kg})$	3.2818×10^5	1.8968×10^4	1.2841×10^4	5.2998×10^3	0.9198
p_1/Pa	8.5462×10^{10}	8.0987×10^8	7.4782×10^8	6.8667×10^8	0.1190
p_2/Pa	8.5462×10^{10}	4.1430×10^8	3.9770×10^8	3.7940×10^8	6.3500×10^{-2}
$v_1/(\text{m}/\text{s})$	1.8984×10^2	2.0640	1.9820	1.8310	8.6400×10^{-2}
$v_2/(\text{m}/\text{s})$	1.8984×10^2	2.1220	2.0120	1.8530	9.7800×10^{-2}

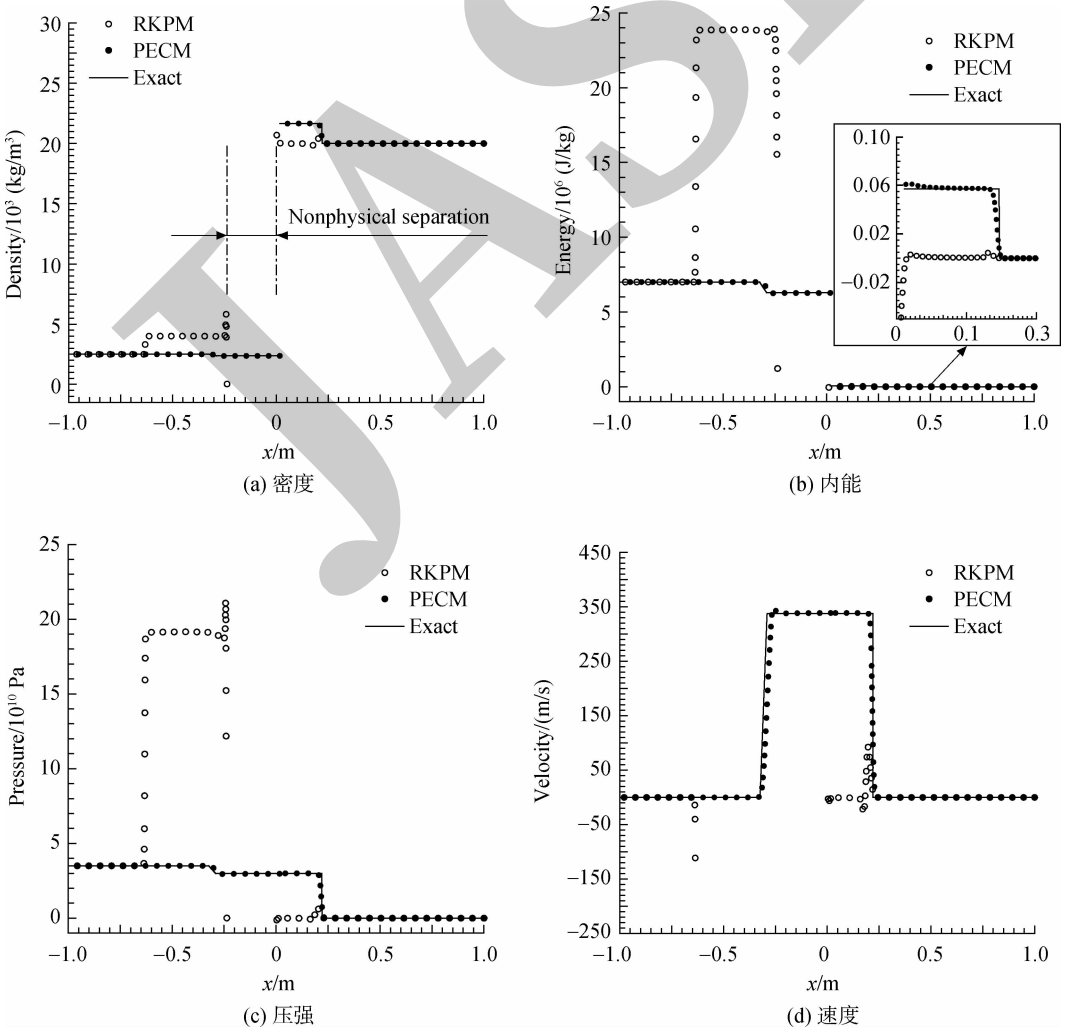


图 5 模型 5 的数值计算结果($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)
Fig. 5 Numerical results about model 5 ($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

表 8 模型 5 的误差和收敛精度等级

Table 8 Errors and convergence accuracy orders of model 5

参数	精确解	数值解误差			$\hat{\xi}$
		$\Delta x=1.00\text{ mm}$	$\Delta x=0.50\text{ mm}$	$\Delta x=0.25\text{ mm}$	
$\rho_1/(\text{kg}/\text{m}^3)$	2.3697×10^3	4.4700	4.3100	4.2300	3.9800×10^{-2}
$\rho_2/(\text{kg}/\text{m}^3)$	2.1658×10^4	5.7000	4.3000	3.1000	0.4393
$e_1/(\text{J}/\text{kg})$	6.2894×10^6	2.3650×10^4	2.0034×10^4	1.7523×10^4	0.2163
$e_2/(\text{J}/\text{kg})$	5.7040×10^4	8.7840×10^2	4.3780×10^2	2.4320×10^2	0.9264
p_1/Pa	2.9808×10^{10}	1.6830×10^8	1.5213×10^8	1.4010×10^8	0.1323
p_2/Pa	2.9808×10^{10}	1.6330×10^8	1.4370×10^8	1.2420×10^8	0.1974
$v_1/(\text{m}/\text{s})$	3.3776×10^2	0.7740	0.6210	0.5470	0.2504
$v_2/(\text{m}/\text{s})$	3.3776×10^2	0.7940	0.6340	0.5590	0.2531

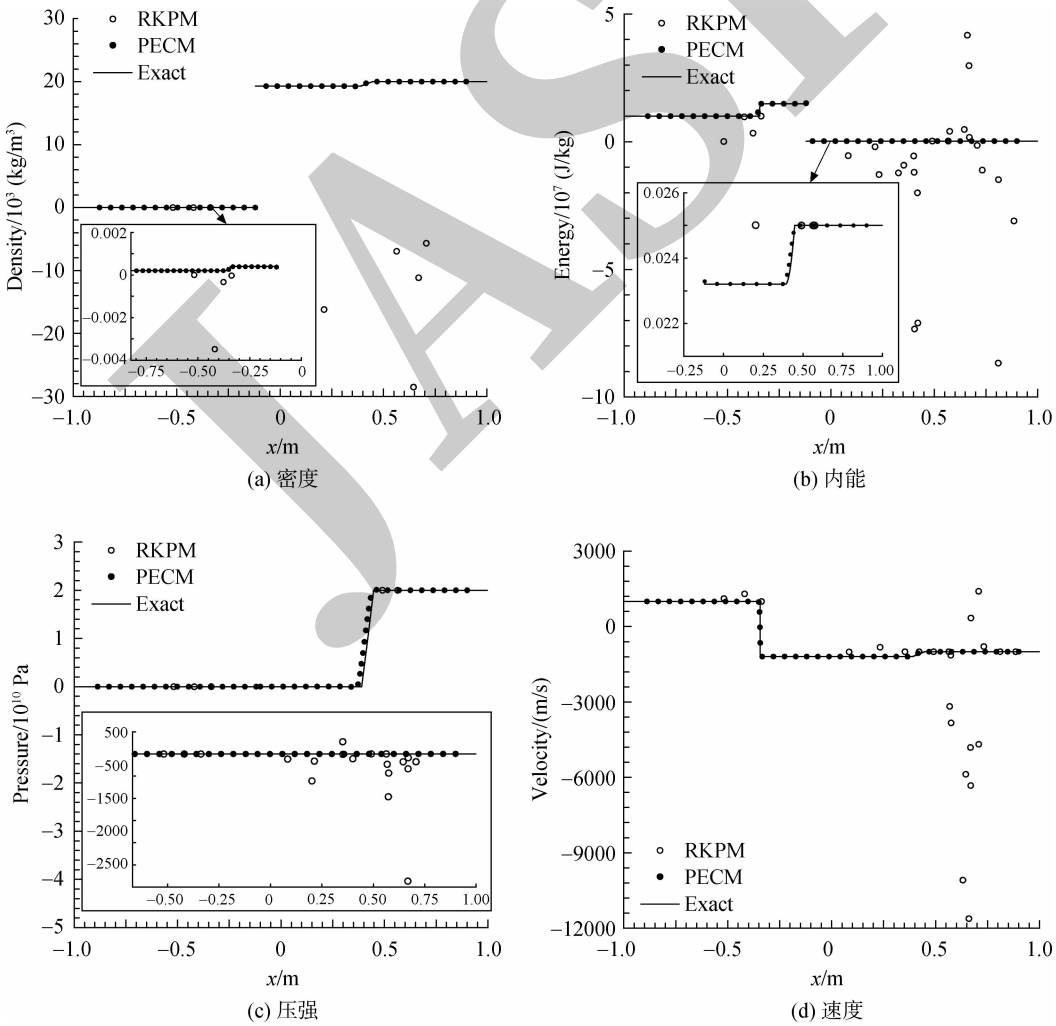


图 6 模型 6 的数值计算结果($t=100.00\mu\text{s}$)

Fig. 6 Numerical results about model 6 ($t=100.00\mu\text{s}$)

表 9 模型 6 的误差和收敛精度等级

Table 9 Errors and convergence accuracy orders of model 6

参数	精确解	数值解误差			$\hat{\xi}$
		$\Delta x=1.00\text{ mm}$	$\Delta x=0.50\text{ mm}$	$\Delta x=0.25\text{ mm}$	
$\rho_1/(\text{kg}/\text{m}^3)$	0.3958	2.3180×10^{-3}	2.1460×10^{-3}	2.0126×10^{-3}	0.1019
$\rho_2/(\text{kg}/\text{m}^3)$	1.9284×10^4	1.0000	0.5000	0.2600	0.9717
$e_1/(\text{J}/\text{kg})$	1.4877×10^7	1.8210×10^5	1.7510×10^5	1.6890×10^5	5.4300×10^{-2}
$e_2/(\text{J}/\text{kg})$	2.3211×10^5	7.1982×10^2	3.6249×10^2	2.0726×10^2	0.8981
p_1/Pa	2.9438×10^6	1.6680×10^4	1.2190×10^4	9.0900×10^3	0.4379
p_2/Pa	2.9438×10^6	2.2573×10^6	1.2179×10^6	6.1771×10^5	0.9348
$v_1/(\text{m}/\text{s})$	1.1926×10^3	1.4500	1.0200	0.6200	0.6129
$v_2/(\text{m}/\text{s})$	1.1926×10^3	0.8400	6.500	0.4300	0.4830

模型 7 存在压强间断和较低程度的拉伸型速度间断,尚未达到中间出现真空的速度条件,计算结果和收敛性量化结果如图 7 和表 10。RKPM

的密度和压强在界面处跳动明显,PECM 的数值波动很小。

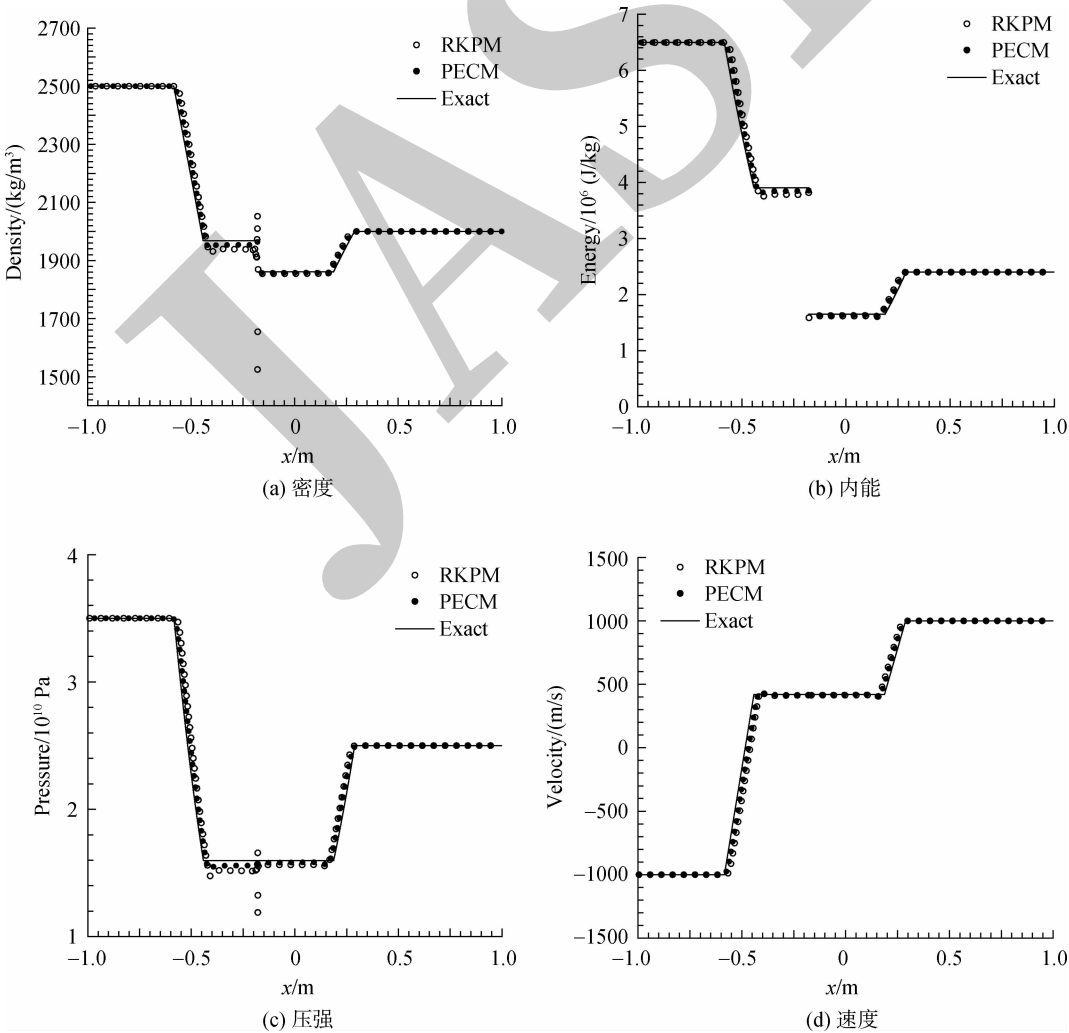


图 7 模型 7 的数值计算结果($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

Fig. 7 Numerical results about model 7 ($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

表 10 模型 7 的误差和收敛精度等级

Table 10 Errors and convergence accuracy orders of model 7

参数	精确解	数值解误差			$\hat{\xi}$
		$\Delta x=1.00\text{ mm}$	$\Delta x=0.50\text{ mm}$	$\Delta x=0.25\text{ mm}$	
$\rho_1/(\text{kg/m}^3)$	1.9683×10^3	14.6400	12.3100	10.1300	0.26560
$\rho_2/(\text{kg/m}^3)$	1.8608×10^3	21.8700	13.7860	10.9030	0.50210
$e_1/(\text{J/kg})$	3.9042×10^6	1.0290×10^5	8.8990×10^4	7.1150×10^4	0.26620
$e_2/(\text{J/kg})$	1.6471×10^6	3.0250×10^4	2.3830×10^4	1.6550×10^4	0.43510
p_1/Pa	1.5975×10^{10}	6.8640×10^8	5.9250×10^8	5.0830×10^8	0.21670
p_2/Pa	1.5975×10^{10}	3.5290×10^8	2.8100×10^8	2.1340×10^8	0.36290
$v_1/(\text{m/s})$	4.2025×10^2	24.5810	15.8350	9.7200	0.66930
$v_2/(\text{m/s})$	4.2025×10^2	16.2670	11.6880	7.5320	0.55540

模型 8 存在压强间断和较程度的拉伸型速度间断,对应恰好形成真空的临界速度条件,计算结果和收敛性量化结果如图 8 和表 11。对光滑

长度的变化强行限制在初值的三倍以内,RKPM 才有本文的结果,其中界面处存在密度和压强的明显跳动。如令光滑长度不受限制地按演化方程

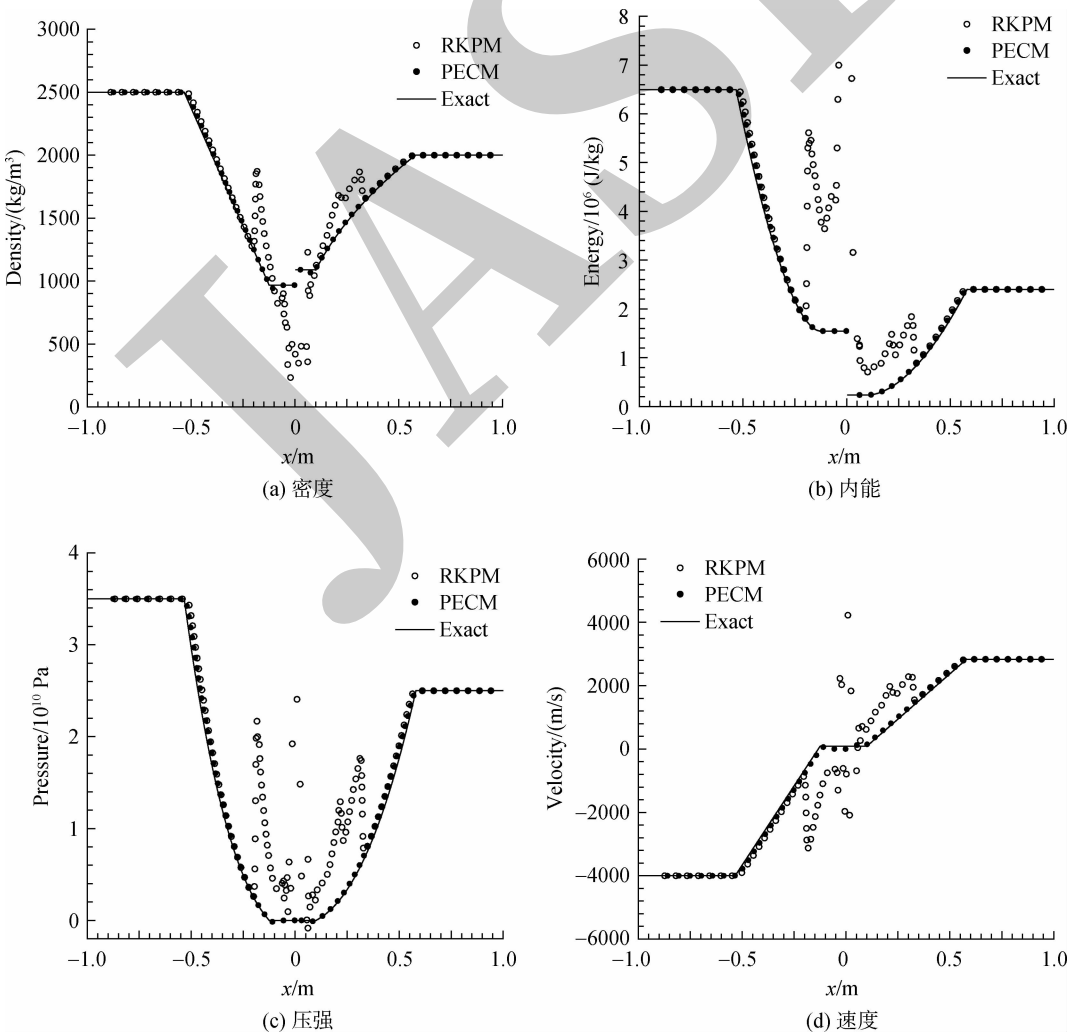


图 8 模型 8 的数值计算结果($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

Fig. 8 Numerical results about model 8 ($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

表 11 模型 8 的误差和收敛精度等级

Table 11 Errors and convergence accuracy orders of model 8

参数	精确解	数值解误差			$\hat{\xi}$
		$\Delta x=1.00\text{ mm}$	$\Delta x=0.50\text{ mm}$	$\Delta x=0.25\text{ mm}$	
$\rho_1/(\text{kg}/\text{m}^3)$	9.6843×10^2	26.0590	19.8460	14.3130	0.4322
$\rho_2/(\text{kg}/\text{m}^3)$	1.0884×10^3	30.6800	21.7000	14.9800	0.5171
$e_1/(\text{J}/\text{kg})$	1.5456×10^6	2.2800×10^3	1.6400×10^3	1.2500×10^2	0.4336
$e_2/(\text{J}/\text{kg})$	2.3503×10^5	9.1810×10^3	6.7720×10^3	4.1560×10^3	0.5717
p_1/Pa	0	1.6943×10^8	1.2985×10^8	9.5232×10^7	0.4156
p_2/Pa	0	1.0416×10^8	7.5423×10^7	5.1728×10^7	0.5049
$v_1/(\text{m}/\text{s})$	90.9740	89.1310	62.3720	40.6380	0.5665
$v_2/(\text{m}/\text{s})$	90.9740	36.4320	28.5760	20.3540	0.4199

变化,则计算失稳并发散,得不到计算结果。模型 9 存在压强间断和极高程度的拉伸型速度间断,中间充分形成真空,计算结果和收敛性量化结果如图 9 和表 12。对光滑长度的变化限制

PECM 则计算稳定且与精确解符合得较好,其中的速度模化因子对数值波动有抑制作用。

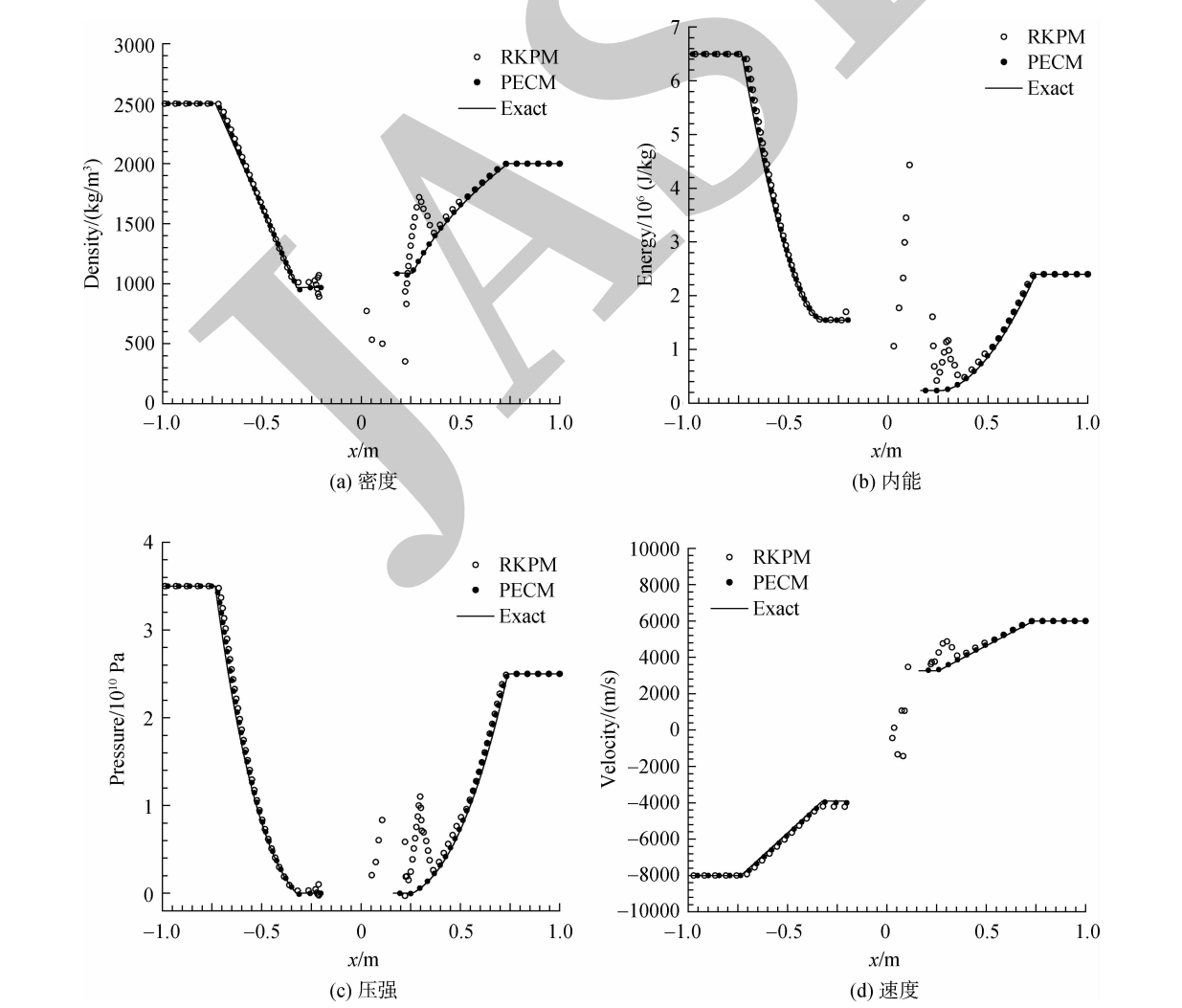


图 9 模型 9 的数值计算结果($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

Fig. 9 Numerical results about model 9 ($t=50.00\text{ }\mu\text{s}$)

表 12 模型 9 的误差和收敛精度等级

Table 12 Errors and convergence accuracy orders of model 9

参数	精确解	数值解误差			$\hat{\xi}$
		$\Delta x=1.00\text{ mm}$	$\Delta x=0.50\text{ mm}$	$\Delta x=0.25\text{ mm}$	
$\rho_1/(\text{kg}/\text{m}^3)$	9.6843×10^2	18.3870	14.1820	10.4960	0.40440
$\rho_2/(\text{kg}/\text{m}^3)$	1.0884×10^3	25.5800	18.3400	12.5700	0.51250
$e_1/(\text{J}/\text{kg})$	1.5456×10^6	2.2700×10^3	1.6700×10^3	1.2400×10^3	0.43620
$e_2/(\text{J}/\text{kg})$	2.3503×10^5	6.5160×10^3	4.7260×10^3	3.6850×10^3	0.41120
p_1/Pa	0	1.2102×10^8	9.3305×10^7	6.9260×10^7	0.40260
p_2/Pa	0	8.8720×10^7	6.4597×10^7	4.4750×10^7	0.49370
$v_1/(\text{m}/\text{s})$	3.9090×10^3	89.1700	80.7650	71.5430	0.15880
$v_2/(\text{m}/\text{s})$	3.2568×10^3	34.7300	32.4700	30.1700	0.10150

在初值的 3 倍以内,则 RKPM 才有本文结果,界面处密度和压强跳动明显,如无此限制,则计算失稳并发散,得不到计算结果。PECM 计算稳定且与精确解得较好。

验证结果表明,对应式(24)~式(27)的 RK-PM 及经典的 SPH 不适应强间断问题,而 PECM 对单个或多个参数同时存在强间断的模型均能稳定准确地求解。针对需要考虑物理黏性的流动,可在动量方程和能量方程中分别添加物理黏性所对应的应力张量及其做功项。无黏流计算中的人为黏性压强用于激波捕获,主要在流体快速受压时起作用,且仅体现于应力张量中的球量部分,而物理黏性产生的应力张量同时包含球量和偏量部分,在压缩、膨胀和剪切运动中均发挥作用。因基于纯拉氏无网格计算思想以及不依赖界面描述的多物质信息交换机制,PECM 对飞行器外部或发动机内部带有运动固件并伴随冲击波、膨胀波、相变、燃烧和材料破坏等多物理现象的高维复杂运动具有很好的适应性,相应的可信度评估则对应更高层级的验证与确认。

9 结 论

结合数学方法对物理规律的相容性分析,可压流 PECM 在核函数、模化因子和离散方程等三个方面对现有的核估计类无网格方法进行了改造。动量方程的核函数采用了基于质量的权重分配思想,该思想来源于多个流体微团组成的团簇在运动时所应该遵循的牛顿第二定律和团簇内微团之间的协调性。对压强模化因子的构造,关键在于如何配置中心及近邻质团密度的权重。动量

方程中的压强模化因子对两者分配相同的权重,因为兼顾团簇整体性运动的黏性压强决定于团簇的平均密度。能量方程中的压强模化因子按密度的倒数分配权重,因为导致内能增加的黏性压强受小密度质团所主导。速度模化因子致力于强化误差控制中的负反馈机制,其设计思想和作用原理来自压强与速度的相关性以及两者在连续介质中的宏观连续性。因动量方程引入了新的核函数,其离散形式随之改变。为避免密度、内能和光滑长度的数值耗散,并准确表现间断面两侧不同物质在密度和内能上客观存在的间断性,将质量、能量和光滑长度离散方程中的密度及压强移到了核估计算子之外。

本文中的 9 个模型基本体现了无网格方法在一维流体模拟中遇到的各种挑战,先验分析和程序验证的结果比较充分地支持了 PECM 的设计思想和设计目标。结果表明,与现有核估计类无网格方法相比,PECM 对流体模拟的稳定性和准确性有质的提高,其对应于流体计算的验证是其固体计算验证与确认的基础。

参考文献:

[1] 马智博,应阳君,朱建士. QMU 认证方法及其实现途径[J]. 核科学与工程,2009,29(1):1-9.
MA Zhibo, YING Yangjun, ZHU Jianshi. QMU certifying method and its implementation[J]. Chinese Journal of Nuclear Science and Engineering, 2009, 29(1): 1-9. (in Chinese)

[2] OBERKAMPF W L, ROY C J. Verification and validation in science computing[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.

[3] ROY C J, OBERKAMPF W L. A comprehensive frame-

- work for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(25/26/27/28): 2131-2144.
- [4] 马智博, 孙宇涛, 殷建伟, 等. 基于数值模拟的 QMU 决策体系[J]. *计算物理*, 2016, 33(6): 661-670.
MA Zhibo, SUN Yutao, YIN Jianwei, et al. QMU decision based on modeling & simulation[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2016, 33(6): 661-670. (in Chinese)
- [5] NOH W F, CEL; a time-dependent two-space-dimensional coupled Eulerian-Lagrangian code[J]. *Methods in Computational Physics*, 1964, 3: 117-179.
- [6] HIRT C W, AMSDEN A A, COOK J L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds[J]. *Journal of Computational Physics*, 1974, 14(3): 227-253.
- [7] XU Weihou, XU Kun. *Computational fluid dynamics based on the unified coordinates* [M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [8] 王瑞利, 刘全, 林忠. 邻域可变技术及其在闭穴滑移计算中的应用[J]. *计算物理*, 2012, 29(5): 667-674.
WANG Ruili, LIU Quan, LIN Zhong. Technique for changing connectivity of mesh and closed void interface simulation[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2012, 29(5): 667-674. (in Chinese)
- [9] 宋顺成, 李国斌, 才鸿年, 等. 战斗部对混凝土先侵彻后爆炸的数值模拟[J]. *兵工学报*, 2006, 27(2): 230-234.
SONG Shuncheng, LI Guobin, CAI Hongnian, et al. Numerical simulation of penetration-then-detonation of concrete target with projectile[J]. *Acta Armamentarii*, 2006, 27(2): 230-234. (in Chinese)
- [10] ELLIOTT J B. Hydra modeling of experiments to study ICF capsule fill hole dynamics using surrogate targets[R]. Lawrence Livermore National Laboratory Report, UCRL-TR-234075, 2007.
- [11] 符尚武, 黄书科, 李生. 间接驱动、高收缩内爆试验的数值模拟[J]. *计算物理*, 1999, 16(2): 162-166.
FU Shangwu, HUANG Shuke, LI Sheng. Numerical simulation of indirectly driven high-convergence implosions[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1999, 16(2): 162-166. (in Chinese)
- [12] 宁成, 丁宁, 杨震华. “强光一号”装置上部分 Z 箍缩实验结果的物理分析[J]. *物理学报*, 2007, 56(1): 338-345.
NING Cheng, DING Ning, YANG Zhenhua. Physical analysis of the certain results in Z-pinch experiments on the “Qiang Guang-I” generator[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, 56(1): 338-345. (in Chinese)
- [13] MCMILLAN C F, ADAMS T F, MCCOY M G, et al. Computational challenges in nuclear weapons simulation [R]. Lawrence Livermore National Laboratory Report UCRL-JC-155202, 2003.
- [14] 马智博. 物质团法: 一个普适的数值方法体系[J]. *计算物理*, 2017, 34(3): 261-272.
- MA Zhibo. Physics evoked cloud method: a versatile systematic method for numerical simulations [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2017, 34(3): 261-272. (in Chinese)
- [15] MA Zhibo, ZHAO Yazhou. Physics evoked cloud method [J]. *International Journal of Computational Method*, 2018, 15(3): 1846006. 1-1846006. 20.
- [16] 马智博, 赵亚洲. 无网格方法关于导数计算的程序验证[J]. *航空动力学报*, 2017, 32(8): 1886-1899.
MA Zhibo, ZHAO Yazhou. Code verification of mesh free method with computation of derivatives [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2017, 32(8): 1886-1899. (in Chinese)
- [17] GINGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics; theory and application to non-spherical stars [J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, 181(3): 375-389.
- [18] LIU W K, JUN S, LI S F, et al. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, 38(10): 1655-1679.
- [19] 殷建伟, 马智博. 重构粒子法对光滑粒子法的改进效果[J]. *计算物理*, 2009, 26(4): 553-558.
YIN Jianwei, MA Zhibo. Reproducing kernel particle method in smoothed particle hydrodynamics [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2009, 26(4): 553-558. (in Chinese)
- [20] CHEN J K, BERAUN J E, JIH C K. An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics [J]. *Computational Mechanics*, 1999, 23(4): 279-287.
- [21] ZHANG G M, BATRA R C. Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems [J]. *Computational Mechanics*, 2004, 34(2): 137-146.
- [22] RAFIEE A, THIAGARAJAN K P. An SPH projection method for simulating fluid-hypoeleastic structure interaction [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(33/34/35/36): 2785-2795.
- [23] ANTUONO M, COLAGROSSI A, MARRONE S. Numerical diffusive terms in weakly-compressible SPH schemes [J]. *Computer Physics Communications*, 2012, 183(12): 2570-2580.
- [24] VON NEUMANN J, RICHTMYER R D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks [J]. *Journal of Applied Physics*, 1950, 21(3): 232-237.
- [25] GODUNOV S K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics [J]. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1959, 47(3): 271-306.
- [26] The American Society of Mechanical Engineers. An illustration of the concepts of verification and validation in computational solid mechanics: ASME V&V 10. 1-2012 [S]. New York: ASME Press, 2012: 1-23.